10 Si consideri la trasformazione geometrica di equazioni:

$$x' = 2x + my - 1, \qquad y' = mx - 2y - 2,$$

dove m è un parametro reale. Trovare l'equazione del luogo geometrico dei suoi punti uniti.

10 Il sistema della trasformazione geometrica è:

$$\begin{cases} x' = 2x + my - 1 \\ y' = mx - 2y - 2 \end{cases}.$$

I punti uniti di una trasformazione sono quei punti che vengono trasformati in sé.
Assunto $x' = x$ e $y' = y$, il sistema diventa:

$$\begin{cases} x = 2x + my - 1 \\ y = mx - 2y - 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + my - 1 = 0 \\ mx - 3y - 2 = 0 \end{cases}.$$

Per ottenere l'equazione cartesiana del luogo geometrico dei punti uniti, si procede all'eliminazione del parametro m:

$$\begin{cases} m = \dfrac{1-x}{y}, \; y \neq 0 \\ \dfrac{1-x}{y}x - 3y - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0 \end{cases}.$$

L'equazione ottenuta, $x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0$, con $y \neq 0$, è una conica con assi paralleli agli assi cartesiani. Operando il completamento del quadrato, risulta:

$$x^2 - x = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ e } 3y^2 + 2y = 3\left(y^2 + \frac{2}{3}y\right) = 3\left[\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9}\right].$$

L'equazione diventa:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{12} \quad \rightarrow \quad \frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{12}} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{7}{36}} = 1.$$

Si tratta di un'ellisse con centro nel punto $\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$ e con semiassi di lunghezza $\sqrt{\frac{7}{12}}$ e $\frac{\sqrt{7}}{6}$.

È necessario discutere la condizione $y = 0$ per vedere se l'ellisse è privata di qualche punto:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + 3y^2 - x + 2y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}.$$

Il punto (0; 0) non appartiene al luogo $\begin{cases} x + my - 1 = 0 \\ mx - 3y - 2 = 0 \end{cases}$ poiché, sostituendo, si trova il sistema impossibile: $\begin{cases} -1 = 0 \\ -2 = 0 \end{cases}$.

Mentre per (1; 0) si ha $\begin{cases} 1 - 1 = 0 \\ m - 2 = 0 \end{cases} \rightarrow m = 2$, che è un valore accettabile per il parametro m.
In conclusione il luogo dei punti uniti della trasformazione geometrica è l'ellisse di equazione

$$\frac{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}{\frac{7}{12}} + \frac{\left(y + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{7}{36}} = 1,$$

privata del punto $O(0; 0)$.