7 Si determini l'equazione del luogo geometrico dei centri delle circonferenze del piano tangenti alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto $(1, 2)$.

7 **Primo metodo**

Osserviamo preliminarmente che due curve sono tangenti in un punto se e solo se sono tangenti in quel punto a una stessa retta. Ricaviamo la retta tangente alla parabola $y = x^2 + 1$ nel punto (1; 2); a tal fine determiniamo la funzione derivata di y

$$y' = 2x$$

il cui valore per $x = 1$ ci dà il coefficiente angolare della retta tangente:

$$y'(1) = 2.$$

Pertanto l'equazione della retta è

$$y = 2(x - 1) + 2 \quad \rightarrow \quad y = 2x.$$

Costruiamo il fascio di circonferenze tangenti a tale retta nel punto (1; 2). Combiniamo linearmente l'equazione della circonferenza di raggio nullo di centro (1; 2) e l'equazione della retta stessa (elementi «*degeneri*» del fascio):

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + k(y - 2x) = 0 \quad \rightarrow \quad x^2 + y^2 - 2(k + 1)\,x + (k - 4)\,y + 5 = 0.$$

Il centro di tale circonferenza è il punto C di coordinate $(x;\ y)$:

$$\begin{cases} x = k + 1 \\ y = \dfrac{4 - k}{2} \end{cases}$$

Ricavando il parametro k dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ricava il luogo geometrico cercato:

$$\begin{cases} k = x - 1 \\ y = \dfrac{4 - x + 1}{2} \end{cases} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{x}{2} + \frac{5}{2}.$$

Secondo metodo

La famiglia delle circonferenze tangenti in un punto a una data retta costituisce un fascio di circonferenze il cui asse radicale è la retta stessa. Poiché il luogo dei centri delle circonferenze del fascio è una retta perpendicolare all'asse radicale, allora il luogo cercato è la perpendicolare alla retta tangente nel punto di tangenza.