

ESAME DI STATO DI LICEO SCIENTIFICO
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

- 7** In un piano, riferito a un sistema monometrico di assi cartesiani ortogonali (Oxy), sono assegnate le rette r ed s di equazioni rispettivamente $2x + my = 1$ e $mx - 2y = 2$, dove m è un parametro reale. Qual è l'equazione del luogo geometrico descritto dal punto di intersezione delle due rette al variare di m ?

SOLUZIONE DELLA PROVA D'ESAME
CORSO DI ORDINAMENTO • 2005
Sessione suppletiva

- 7** Per determinare l'equazione cartesiana del luogo geometrico si pongono a sistema le equazioni parametriche delle rette r e s :

$$\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx - 2y = 2 \end{cases}.$$

Si ricava il parametro m dalla prima equazione e si sostituisce nella seconda:

$$\begin{cases} m = \frac{1-2x}{y}, \quad y \neq 0 \\ \frac{1-2x}{y}x - 2y = 2 \end{cases} \rightarrow x - 2x^2 - 2y^2 - 2y = 0 \rightarrow x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + y = 0.$$

Per $y \neq 0$, il luogo geometrico è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + y = 0$. Essa ha centro $C\left(\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}\right)$, raggio $r = \frac{\sqrt{5}}{4}$ e passa per l'origine $O(0; 0)$.

È necessario discutere la condizione $y = 0$ per vedere se la circonferenza è privata di qualche punto:

$$\begin{cases} y = 0 \\ x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}.$$

Il punto $(0; 0)$ non appartiene al luogo $\begin{cases} 2x + my = 1 \\ mx - 2y = 2 \end{cases}$ poiché, sostituendo, si trova il sistema impossibile:

$$\begin{cases} 0 = 1 \\ 0 = 2 \end{cases}.$$

Mentre per $\left(\frac{1}{2}; 0\right)$ si ha $\begin{cases} 1 = 1 \\ \frac{1}{2}m = 2 \end{cases} \rightarrow m = 4$, che è un valore accettabile per il parametro m .

In conclusione il luogo cercato è la circonferenza di equazione $x^2 + y^2 - \frac{x}{2} + y = 0$, privata del punto $O(0; 0)$.