PROBLEMA 1

Nel piano sono dati: il cerchio γ di diametro $OA = a$, la retta t tangente a γ in A, una retta r passante per O, il punto B, ulteriore intersezione di r con γ, il punto C intersezione di r con t.
La parallela per B a t e la perpendicolare per C a t s'intersecano in P. Al variare di r, P descrive il luogo geometrico Γ noto con il nome di **versiera di Agnesi** [da *Maria Gaetana Agnesi*, matematica milanese, (1718-1799)].

1. Si provi che valgono le seguenti proposizioni:

   $OD : DB = OA : DP$

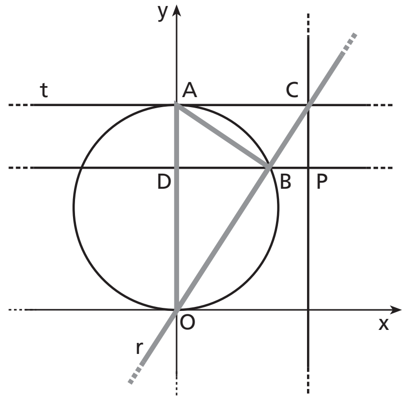
   $OC : DP = DP : BC$

   ove D è la proiezione ortogonale di B su OA.
2. Si verifichi che, con una opportuna scelta del sistema di coordinate cartesiane ortogonali e monometriche Oxy, l'equazione cartesiana di Γ è: $y = \dfrac{a^3}{x^2 + a^2}$;
3. Si tracci il grafico di Γ e si provi che l'area compresa fra Γ e il suo asintoto è quattro volte quella del cerchio γ.

PROBLEMA 1

1. Con riferimento alla figura 1 si osserva che la similitudine tra i triangoli ODB e OAC permette di scrivere: $OD : DB = OA : AC$; essendo $AC = DP$ la prima proporzione è dimostrata.

Il triangolo OAB è inscritto in una semicirconferenza, quindi $O\hat{A}B = \frac{\pi}{2}$, i triangoli OAC e ABC sono simili, quindi: $OC : AC = AC : BC$ che equivale alla seconda proporzione, essendo ancora $AC = DP$.



▶ **Figura 1.**

2. Scegliendo il sistema di riferimento come in figura 1, l'equazione cartesiana del luogo Γ si otterrà dalle coordinate del punto P.
Le coordinate di B sono date dall'intersezione tra il cerchio γ ed il fascio di rette passanti per l'origine.

$$B: \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4} \\ y = mx \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{am}{1+m^2} \\ y = \frac{am^2}{1+m^2} \end{cases}$$

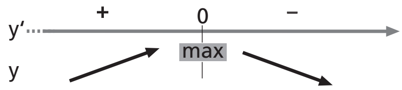
Le coordinate di C sono date dall'intersezione tra la retta $y = a$ ed il fascio di rette passanti per l'origine.

$$C: \begin{cases} y = a \\ y = mx \end{cases} = \begin{cases} x = \frac{a}{m} \\ y = a \end{cases}$$

Ma $y_P = y_B$ e $x_P = x_C$, dunque $P: \begin{cases} x = \frac{a}{m} \\ y = \frac{am^2}{1+m^2} \end{cases}$, allora ricavando m dalla prima equazione e sostituendo nella seconda si ottiene: $y = \frac{a\left(\frac{a}{x}\right)^2}{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2} = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$.

3. Γ: $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$ è una funzione definita $\forall x \in \mathbb{R}$, pari (simmetrica rispetto all'asse delle y), e sempre positiva. Interseca l'asse delle y nel punto $A(0; a)$, non interseca l'asse delle x.
$\lim_{x \to \pm\infty} y(x) = 0$, il grafico ha un asintoto orizzontale $y = 0$.
$y' = \frac{-2a^3 x}{(x^2 + a^2)^2} > 0$, per $x < 0$.

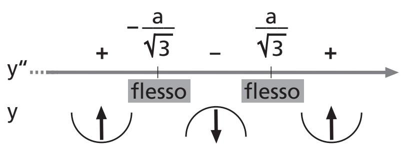
Il punto $A(0;\, a)$ è un punto di massimo (figura 2).



◀ **Figura 2.**

$$y'' = \frac{2a^3(3x^2 - a^2)}{(x^2 + a^2)^3} > 0, \text{ per } x < -\frac{a}{\sqrt{3}} \text{ e per } x > \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

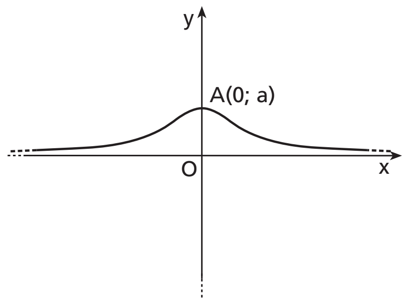
La concavità ha l'andamento di figura 3.



◀ **Figura 3.**

Si hanno due punti di flesso: $F_1\left(-\frac{a}{\sqrt{3}};\, \frac{3}{4}a\right)$ e $F_2\left(\frac{a}{\sqrt{3}};\, \frac{3}{4}a\right)$.

In definitiva il grafico è quello rappresentato in figura 4.



▲ **Figura 4.**

L'area del cerchio γ è $\pi \cdot \frac{a^2}{4}$

L'area compresa tra Γ e l'asintoto $y = 0$ si ottiene da: $2\int_0^{+\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2}\,dx = 2\lim_{k\to+\infty}\int_0^k \frac{a}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\,dx$, ponendo $t = \frac{x}{a}$, si ottiene $2\lim_{k\to+\infty}\left[a^2 \cdot \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^k = 2 \cdot a^2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi a^2$, quindi è pari a quattro volte quella del cerchio γ.